Correction Feuille Exercice 19

Étudier une suite définie par une intégrale

Exercice 8

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

D'après l'inégalité de la moyenne

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}.}$$

2. On a alors

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

On avait déjà obtenu cette inégalité en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln.

Exercice 9

On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Longrightarrow 1 \leq 1 + x \leq 2 \\ &\Longrightarrow 1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow x^n \geq \frac{x^n}{1+x} \geq \frac{x^n}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0,1], 0 \leq \tfrac{x^n}{1+x} \leq x^n.}$$

2. On rappelle que les fonctions $x \to \dfrac{x^n}{1+x}$ et $x \to x^n$ sont continues sur $[0;1]$. D'après la question précédente

$$\begin{aligned} &\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \\ \Longrightarrow \quad & 0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ \Longrightarrow \quad & 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} - 0 \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, (u_n) est convergente et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

Exercice 10 (*)

1. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \to x^2 e^{nx^3}$ est continue sur $[0;1]$. L'intégrale est donc bien définie. Il y a deux méthodes, on peut calculer les termes de la suite (a_n).

$$a_n = \left[\frac{1}{3n} e^{nx^3}\right]_0^1 = \frac{e^n}{3n}$$

On étudie ensuite la suite $a_n = f(n)$ en étudiant par exemple la fonction sous-jacente. Mais on peut également trouver la monotonie en remarquant que (pour $x \in [0,1]$)

$$\begin{aligned} n \leq n+1 &\Longrightarrow nx^3 \leq (n+1)x^3 \\ &\Longrightarrow e^{nx^3} \leq e^{(n+1)x^3} \\ &\Longrightarrow x^2 e^{nx^3} \leq x^2 e^{(n+1)x^3} \\ &\Longrightarrow \int_0^1 x^2 e^{nx^3} dx \leq \int_0^1 x^2 e^{(n+1)x^3} dx \\ &\Longrightarrow a_n \leq a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, remarquons que la fonction $t \to e^{-t^2}$ est continue sur $[0;n]$. On calcule alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \int_0^{n+1} e^{-t^2} dt - \int_0^n e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{n+1} e^{-t^2} dt + \int_n^0 e^{-t^2} dt \\ &= \int_n^{n+1} e^{-t^2} dt \quad \text{relation de Chasles} \end{aligned}$$

Or la fonction $t \to e^{-t^2}$ est positive donc $b_{n+1} - b_n = \int_n^{n+1} e^{-t^2} dt > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

Exercice 11 (**)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

PARTIE I : La fonction $x \to 1 + xe^{-x}$ est dérivable et strictement positive sur $[0,+\infty[$. La fonction f est donc dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que composée de fonction dérivable. Et on a

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{1 + xe^{-x}} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$$

La dérivée est du signe de $(1-x)$. De plus $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par croissance comparée et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\ln(1+e^{-1})$	$\searrow$	0

PARTIE II : Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx$. On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode :** La fonction f est continue sur $[0;\lambda]$ et elle est majorée en $x = 1$ (par $f(1) = \ln(1 + e^{-1})$ sur cet intervalle. Donc pour tout $x \in [0, \lambda]$,

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(1) &\Longrightarrow \int_0^\lambda f(x)dx \leq \int_0^\lambda f(1)dx \\ &\Longrightarrow A(\lambda) \leq \lambda f(1) \end{aligned}$$

2. **Deuxième méthode :**
   (a) On effectue une intégration par partie. On a $\begin{matrix} u(x) = x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{matrix}$ u et v sont deux fonctions de classe C^1 donc

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x}dx \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} - (-e^0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } \int_0^\lambda xe^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1}$$

   (b) On admet que pour tout nombre réel positif u ; $\ln(1 + u) \leq u$. Or $xe^{-x} > 0$ donc pour $\lambda > 0$

$$\ln(1 + xe^{-x}) \leq xe^{-x} \Longrightarrow \int_0^\lambda \ln(1 + xe^{-x})dx \leq \int_0^\lambda xe^{-x}dx$$

$$\boxed{\text{On conclut alors que } A(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.}$$

Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Exercice 12

1. La fonction $t \to \ln(t)$ est continue sur $[1; e]$. L'intégrale $\int_1^e \ln(t)dt$ est bien définie, calculons la à l'aide d'une intégration par parties. Soient $\begin{matrix} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{matrix}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors,

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(t)dt &= [t\ln(t)]_1^e - \int_1^e \frac{t}{t}dt \\ &= (e - 0) - \int_1^e dt \\ &= e - (e - 1)\boxed{= 1} \end{aligned}$$

2. La fonction $t \to t^2e^{5t}$ est continue sur $[-2; 0]$. L'intégrale $\int_0^{-2} t^2e^{5t}dt$ est bien définie, calculons la à l'aide d'une intégration par parties. Soient $\begin{matrix} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v'(t) = e^{5t} & v(t) = \dfrac{1}{5}e^{5t} \end{matrix}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{-2} t^2e^{5t}dt &= \left[\frac{1}{5}t^2e^{5t}\right]_0^{-2} - \int_0^{-2} \frac{2}{5}te^{5t}dt \\ &= \frac{4}{5}e^{-10} - 0 - \frac{2}{5}\int_0^{-2} te^{5t}dt \end{aligned}$$

On calcule alors $\int_0^{-2} te^{5t}dt$ à l'aide d'une nouvelle intégration par partie. L'intégrale $\int_0^{-2} te^{5t}dt$ est bien définie, calculons la à l'aide d'une intégration par parties. Soient $\begin{array}{ll} u(t)=t & u'(t)=1 \\ v'(t)=e^{5t} & v(t)=\frac{1}{5}e^{5t} \end{array}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{-2} te^{5t}dt &= \left[\frac{1}{5}te^{5t}\right]_0^{-2} - \int_0^{-2} \frac{1}{5}e^{5t}dt \\ &= -\frac{2}{5}e^{-10} - 0 - \frac{1}{5}\int_0^{-2} e^{5t}dt \\ &= -\frac{2}{5}e^{-10} - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}e^{5t}\right]_0^{-2} \\ &= -\frac{2}{5}e^{-10} - \frac{1}{25}e^{-10} + \frac{1}{25} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{-2} t^2e^{5t}dt &= \frac{4}{5}e^{-10} - \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{5}e^{-10} - \frac{1}{25}e^{-10} + \frac{1}{25}\right) \\ &= \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{2}{125}\right)e^{-10} - \frac{1}{125} \\ &\boxed{= \frac{122}{125}e^{-10} - \frac{1}{125}} \end{aligned}$$

Exercice 13 (*)

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt$.

1. La fonction $t \to e^t$ est continue sur $[0;1]$. On calcule

$$I_0 = \int_0^1 \frac{e^t}{0!}dt = \left[e^t\right]_0^1 = e-1$$

La fonction $t \to (1-t)e^t$ est continue sur $[0;1]$. On calcule

$$I_1 = \int_0^1 \frac{(1-t)}{1!}e^t dt = \int_0^1 e^t dt - \int_0^1 te^t dt = \int_0^1 e^t dt - \int_0^1 te^t dt$$

On calcule $\int_0^1 te^t dt$ par une intégration par partie. Soient $\begin{array}{ll} u(t)=t & v'(t)=e^t \\ u'(t)=1 & v(t)=e^t \end{array}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Donc

$$\int_0^1 te^t = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - 0 - [e^t]_0^1 = e - e + 1 = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement } I_1 = e - 1 - 1 = e - 2}$$

2. Pour $t \in [0,1]$, $1-t \in [0,1]$ et $e^t \in [0,e]$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 \le 1-t \le 1 &\Longrightarrow 0 \le (1-t)^n \le 1 \\ &\Longrightarrow 0 \le (1-t)^n e^t \le e^t \le e \\ &\Longrightarrow 0 \le \frac{(1-t)^n}{n!}e^t \le \frac{e}{n!} \\ &\Longrightarrow 0 \le \frac{(1-t)^n}{n!}e^t \le \frac{e}{n!} \\ &\Longrightarrow \int_0^1 0dt \le \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt \le \int_0^1 \frac{e}{n!}dt \\ &\Longrightarrow 0 \le I_n \le \frac{e}{n!} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

3. On a $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$. On pose alors

$$u(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \quad v'(t) = e^t$$

$$u'(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!} \quad v(t) = e^t$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par intégration par partie,

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$
$$\iff \quad I_n = 0 - \frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}\ .}$$

4. On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \left\{ I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right\}$.

— **Initialisation :** $I_0 = e - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = e - 1$. D'après la question 1, la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Or,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.}$

On a donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - I_n$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e}$$

Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 14

1. La fonction $t \to \dfrac{1}{t(\ln t)^3}$ est continue sur $[e; e^2]$. On pose alors le changement de variable $x = \ln(t)$. On a alors
$$dx = \frac{1}{t}dt, \quad t = e \rightsquigarrow x = 1, \quad t = e^2 \rightsquigarrow x = 2$$
En appliquant le changement de variable, on obtient
$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln t)^3}dt &= \int_1^2 \frac{dx}{x^3}\\ &= \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2\\ &= -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &\boxed{= \frac{3}{8}}\end{aligned}$$

2. La fonction $t \to \dfrac{1}{2t+1}$ est continue sur $[0; 1]$. On pose alors le changement de variable $x = 2t + 1$. On a alors
$$dx = 2dt, \quad t = 0 \rightsquigarrow x = 1, \quad t = 1 \rightsquigarrow x = 3$$
En appliquant le changement de variable, on obtient
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{2t+1} &= \int_1^3 \frac{dx}{2x}\\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]_1^3\\ &= \frac{\ln(3)}{2} - \frac{\ln(1)}{2}\\ &\boxed{= \frac{\ln(3)}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 15 (**)

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt \quad J = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt \quad K = \int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt \quad L = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt$$

1. Pour $t \in [0, 1]$, on a $t^2 + 2 \geq 0$. Les fonctions $t \to \sqrt{t^2+2}$, $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t^2+2}}$, $t \to \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}$ et $t \to \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}$ sont continues sur $[0, 1]$.
$$\boxed{\text{Les intégrales } I,\ J,\ K \text{ et } L \text{ existent.}}$$
On a
$$L = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt = \left[\sqrt{t^2+2}\right]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$\boxed{\text{On a donc } L = \sqrt{3} - \sqrt{2}.}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} J+2I &= \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t^2+2}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+2}}dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } J+2I=K.}$$

3. On pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{t^2+2} \qquad v'(t)=1 \\ u'(t) &= \frac{t}{\sqrt{t^2+2}} \qquad v(t)=t \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} K = \int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt &= \left[t\sqrt{t^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt \\ &= 1\sqrt{1+2} - 0 - J \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } K=\sqrt{3}-J}$$

4. On effectue le changement de variable $x = t+\sqrt{t^2+2}$. On a alors

$$dx = \left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right)dt = \left(\frac{\sqrt{t^2+2}+t}{\sqrt{t^2+2}}\right)dt.$$

On sait que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{t^2+2}}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x}dx \\ &= \Big[\ln(x)\Big]_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

c'est à dire que

$$\boxed{I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).}$$

5. On a

$$J+2I = \sqrt{3}-J \Longleftrightarrow 2J = \sqrt{3}-2I$$

c'est à dire

$$\boxed{J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2})}$$

De même $K = \sqrt{3} - J$ donc

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})}$$

Reconnaitre une somme de Riemann et calculer sa limite.

Exercice 16 (*-)**
Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

1. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

On reconnait une somme de Riemann avec $f : x \to \sqrt{x}$, $a = 0$ et $b = 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}.}$$

2. On a

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

On reconnait une somme de Riemann avec $f : x \to \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2).}$$

On aurait aussi pu reconnaitre une somme de Riemann avec $g : x \to \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = 2$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(1+x)]_1^2 = \ln(2)$$

3. On a

$$\begin{aligned}\ln(w_n) &= \ln\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) := \tilde{w}_n\end{aligned}$$

On reconnait une somme de Riemann avec $f : x \to \ln(1+x)$, $a = 0$ et $b = 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{w}_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx$$

On résout cette intégrale par intégration par partie en choisissant

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(1+x) & v'(x) &= 1\\ u'(x) &= \frac{1}{1+x} & v(x) &= x\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x)dx &= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\
&= \ln(2) - 0 - \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}dx \\
&= \ln(2) - \left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\right) \\
&= \ln(2) - (1-\ln(2)) \\
&= 2\ln(2) - 1
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{w}_n = 2\ln(2) - 1$

$$\boxed{\text{et donc } \lim_{n\to+\infty} w_n = e^{2\ln(2)-1}}$$

On aurait aussi pu reconnaitre une somme de Riemann avec $g : x \to \ln(x)$, $a = 1$ et $b = 2$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{w}_n = \int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_1^2 = 2\ln(2) - 1$$